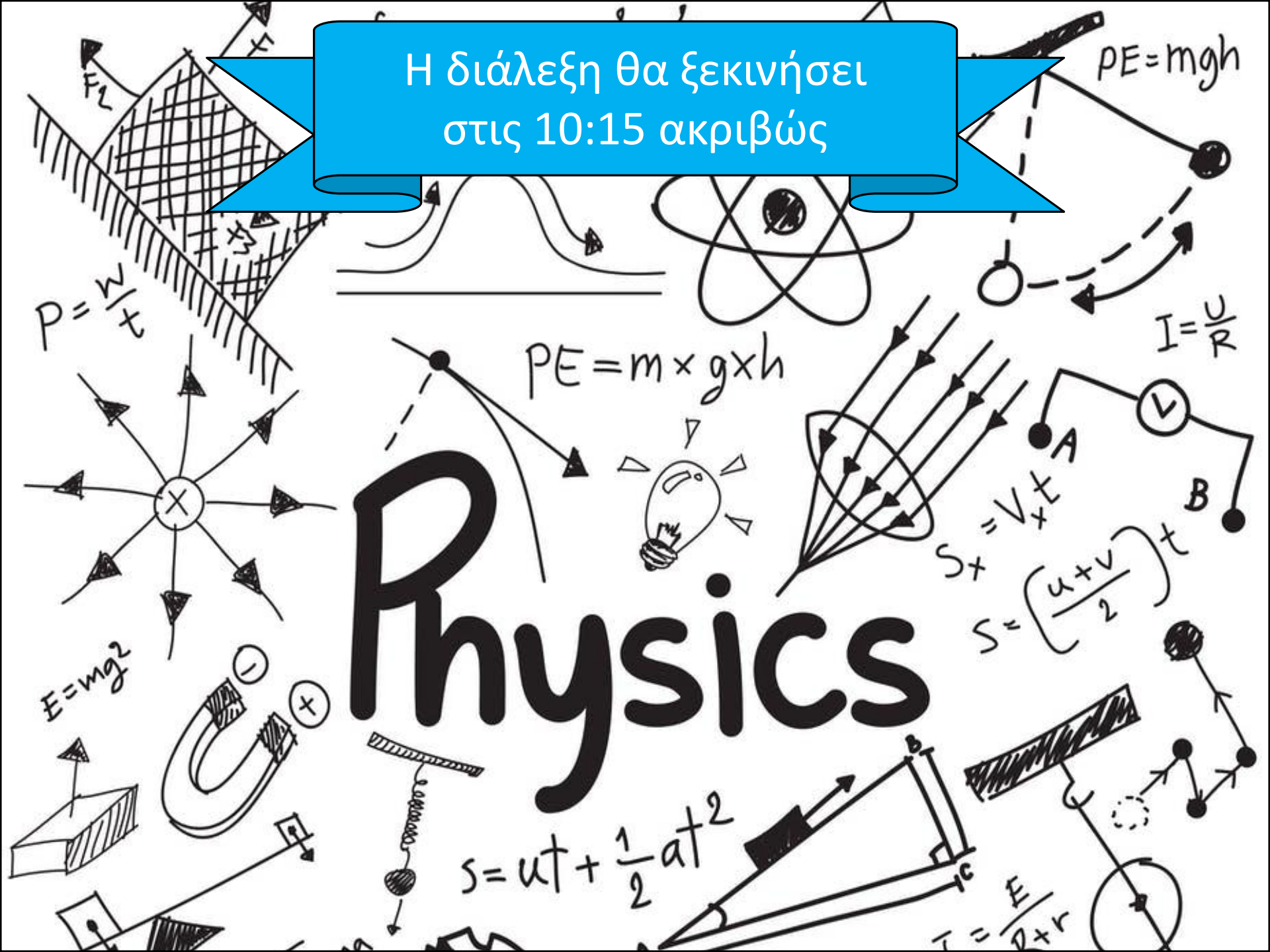

Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:15 ακριβώς
PE=mgh
P=W/t
PE=m×g×h
I=U/R
Physics
A
B
V
E=mg²
s=ut+½at²

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος (επανάληψη…)

- **Ενέργεια**: αφηρημένη έννοια
  - Ποσότητα που σχετίζεται με την κατάσταση ενός ή περισσότερων σωμάτων → αριθμός
  - Ευμετάβλητη: αλλάζει συνεχώς μορφές
- **Σύστημα**: ένα ή περισσότερα σώματα ή/και κομμάτι ενός χώρου
- **Έργο**: τρόπος μεταφοράς ενέργειας προς ή από ένα σύστημα μέσω εξωτερικής δύναμης που ασκείται στο σύστημα

Ενέργεια Συστήματος (επανάληψη…)

- **Ορισμός για δύναμη σταθερού μέτρου**:

$$W = F\Delta \mathrm{x}\cos(\theta) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x}$$

- **Ορισμός για δύναμη μεταβαλλόμενου μέτρου**:

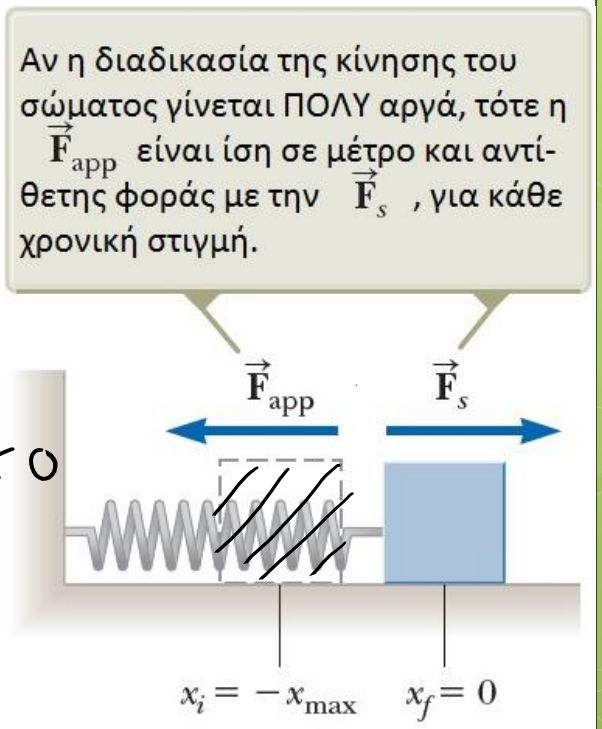
$$W = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b F_x dx$$

- **Έργο δύναμης ελατηρίου:** $F_s = -kx \Rightarrow \vec{F_s} = -kx\cdot\vec{\imath}$

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω μια <u>εξωτερική</u> δύναμη $\vec{F}_{app}$ που εφαρμόζεται στο σύστημα-σώμα, όπως στο σχήμα
  - Κίνηση από το $-x_{max}$ στο 0



- $W_{ext} = \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{x}$

$$= \int_{x_i}^{x_f} (kx\vec{\imath}) \cdot (dx\,\vec{\imath})$$

$$= \int_{-x_{max}}^{0} kx dx = -\frac{1}{2} k x_{max}^2 < 0$$

- Για οποιαδήποτε μετατόπιση

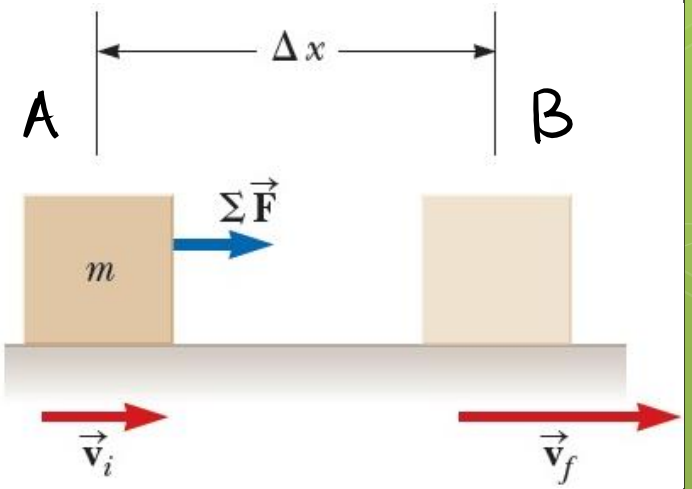
$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} k x_f^2 - \frac{1}{2} k x_i^2 = -W_{F_s}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έργο == Μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας
  - Τι γίνεται αυτή η ενέργεια;
  - Πιθανότατα αλλάζει την ταχύτητα ενός σώματος
- 1ος Τύπος Ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα:

Κινητική Ενέργεια

- Έστω το διπλανό παράδειγμα:
  - Σώμα == σύστημα
    - Σώμα επιταχύνει από u_i σε u_f
    - Σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης



Ενέργεια Συστήματος

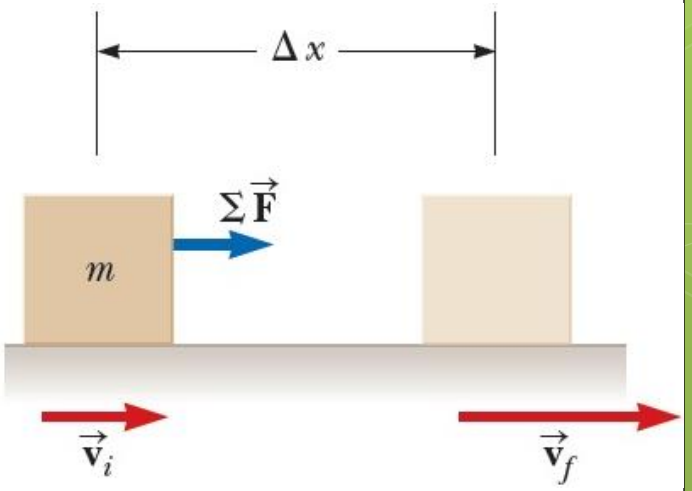
- Θεωρήστε την συνισταμένη των δυνάμεων σταθερή
- Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση
- Άρα

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x}$$

- Από 2ο νόμο Newton, είναι

$$\sum F = ma$$

και με αντικατάσταση έχουμε



Ενέργεια Συστήματος

$$\sum F = m\frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \Leftrightarrow \overbrace{\sum F\,\Delta x}^{W_F} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2$$

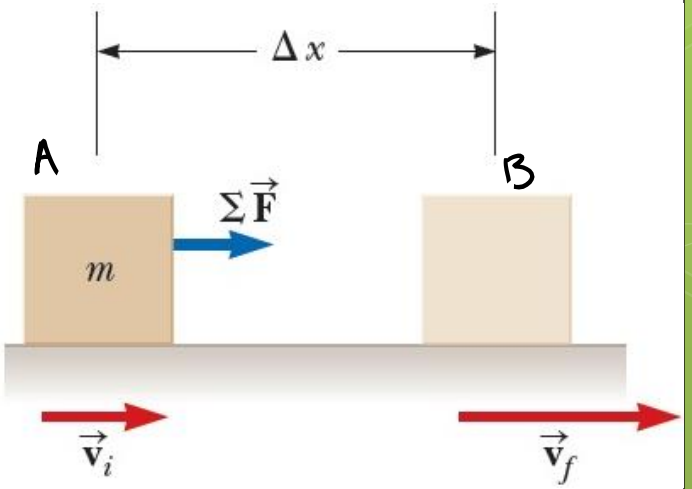
- Το 1ο μέλος είναι ο ορισμός του έργου σταθερής δύναμης
- Άρα

$$W_{ext} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 = \overbrace{K_f - K_i}^{K_B - K_A} = \Delta K^{A\to B}$$

όπου

$$K_x = \frac{1}{2}mu_x^2$$

η ***κινητική ενέργεια*** του σώματος



Ενέργεια Συστήματος

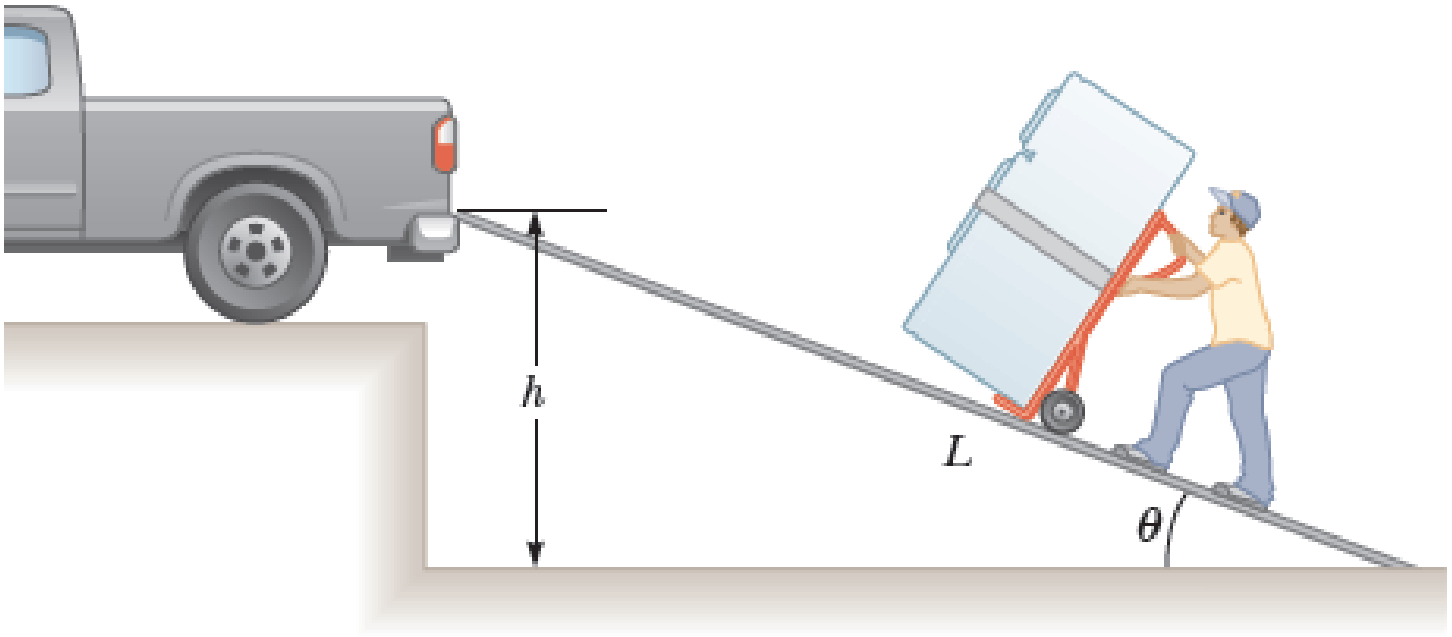
- Η κινητική ενέργεια αναπαριστά την ενέργεια που σχετίζεται με την **κίνηση** ενός σώματος
  - Μονάδα μέτρησης το 1 Joule (J)
- Συνοψίζοντας:

$$W_{ext} = K_f - K_i = \Delta K$$

- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου** (ΘΜΚΕ-Ε)
  - **Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο από μια συνισταμένη δυνάμεων, και η μόνη αλλαγή σε αυτό αφορά το μέτρο της ταχύτητας του, το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος**

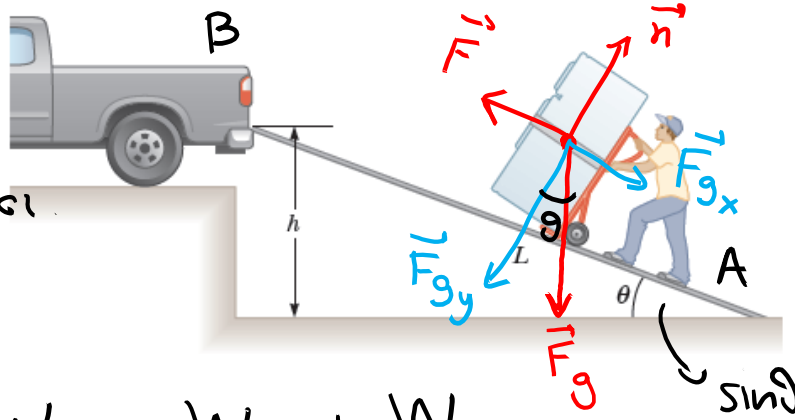
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**
- Ο φίλος σας θέλει να ανεβάσει το ψυγείο του σε ένα φορτηγό χρησιμοποιώντας μια ράμπα υπό γωνία θ όπως στο Σχήμα. Ισχυρίζεται ότι θα απαιτηθεί λιγότερο έργο από μέρους του αν το μήκος της ράμπας L αυξηθεί. Έχει δίκιο; Θεωρήστε ως σύστημα το ψυγείο με το καρότσι μεταφοράς.



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Το σύστημα είναι ψυγείο + καρότσι

ΘΜΚΕ - Ε, από $A \to B$

$$\Delta K^{A\to B} = \sum W_{ext} = W_F + W_n + W_{F_{g_x}} + W_{F_{g_y}}$$

$$\sin\theta = \frac{h}{L}$$

$$K_B - K_A = W_F + \underbrace{W_n}_{0} + W_{F_{g_x}} + \underbrace{W_{F_{g_y}}}_{0} \quad \left(\text{γιατί } \vec{n}, \vec{F}_{g_y} \perp \Delta\vec{x}\right)$$

$$0 - 0 = W_F + W_{F_{g_x}} \iff W_F = -W_{F_{g_x}} \iff$$

$$W_F = -\left(mg\sin\theta \cdot L \cos(\pi)\right) = -\left(mg\sin\theta\, L\,(-1)\right)$$

$$= mg\underbrace{\sin\theta \cdot L}_{h} = mgh$$

Το έργο δεν αλλάζει αν αυξήσαμε το μήκος L!

Ενέργεια Συστήματος

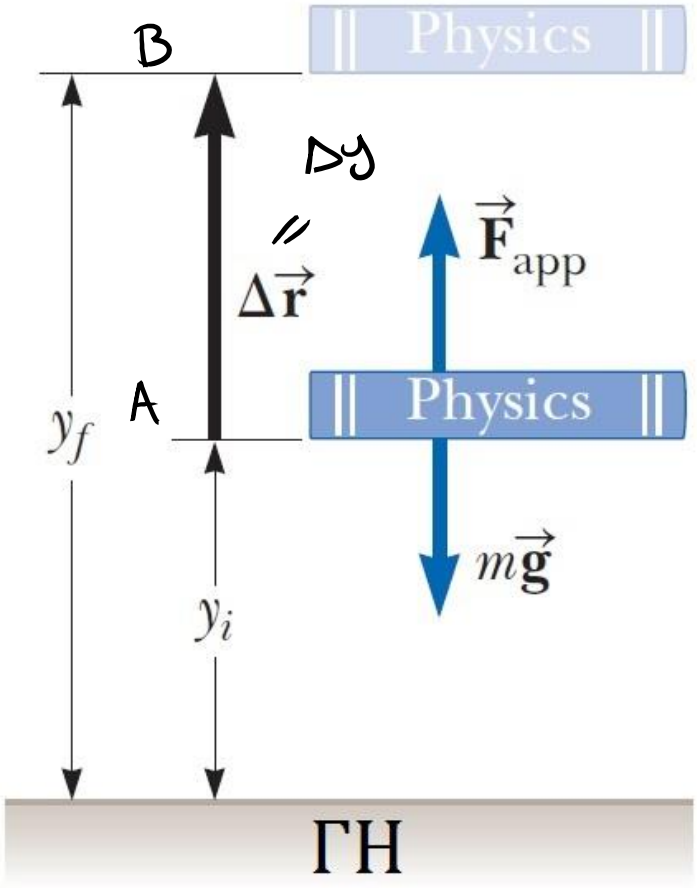
- Ως τώρα, είδαμε την επίδραση ***εξωτερικών*** δυνάμεων σε ένα σύστημα **ενός** μόνο σώματος

- Ας δούμε συστήματα από **δυο ή περισσότερα** σώματα με δυνάμεις ***εσωτερικές*** στο σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

- Μετατοπίζουμε αργά ένα βιβλίο από τη θέση y_i στη θέση y_f μέσω δύναμης $\vec{F}_{app}$
- Αύξηση ενέργειας συστήματος λόγω έργου της $\vec{F}_{app}$
  - Μεταφέρουμε ενέργεια στο σύστημα
- Καμιά αλλαγή στην κινητική ενέργεια του συστήματος μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης!
- Η ενέργεια πρέπει να έχει αποθηκευτεί με άλλη μορφή!

Σύστημα: Βιβλίο + Γη



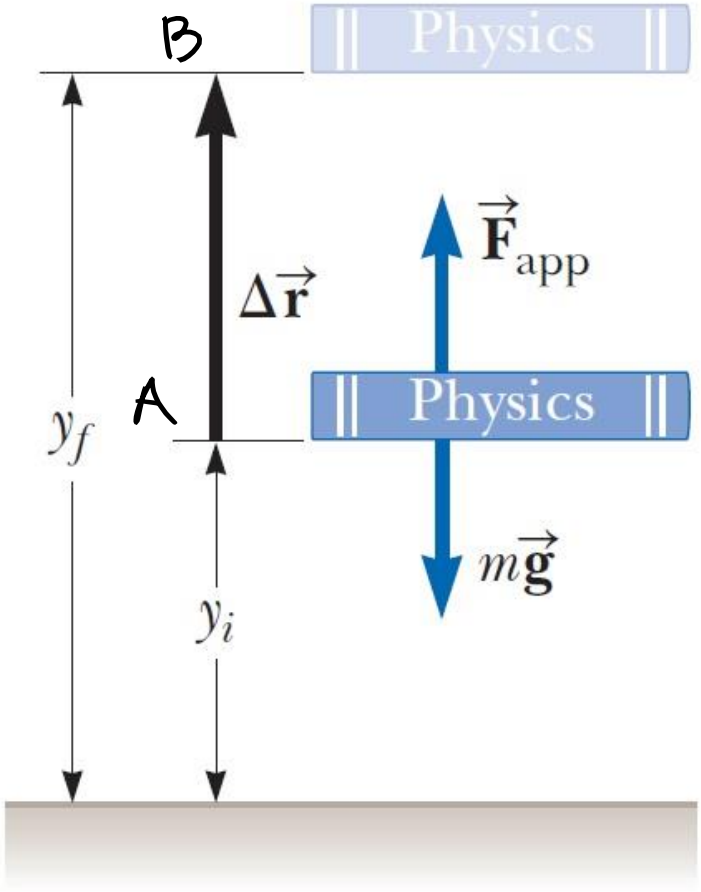
Ενέργεια Συστήματος

- Αν αφήσουμε το βιβλίο, θα πέσει στο ύψος y_i

- Τώρα, το βιβλίο (και το σύστημα) έχει κινητική ενέργεια!
  - Πώς την απέκτησε; Από πού προήλθε?
  - Προέρχεται από το έργο της δύναμης $\vec{F}_{app}$ κατά την ανύψωση του νωρίτερα

- Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο βιβλίο πριν αυτό αφεθεί να πέσει λέγεται

δυναμική ενέργεια



Ενέργεια Συστήματος

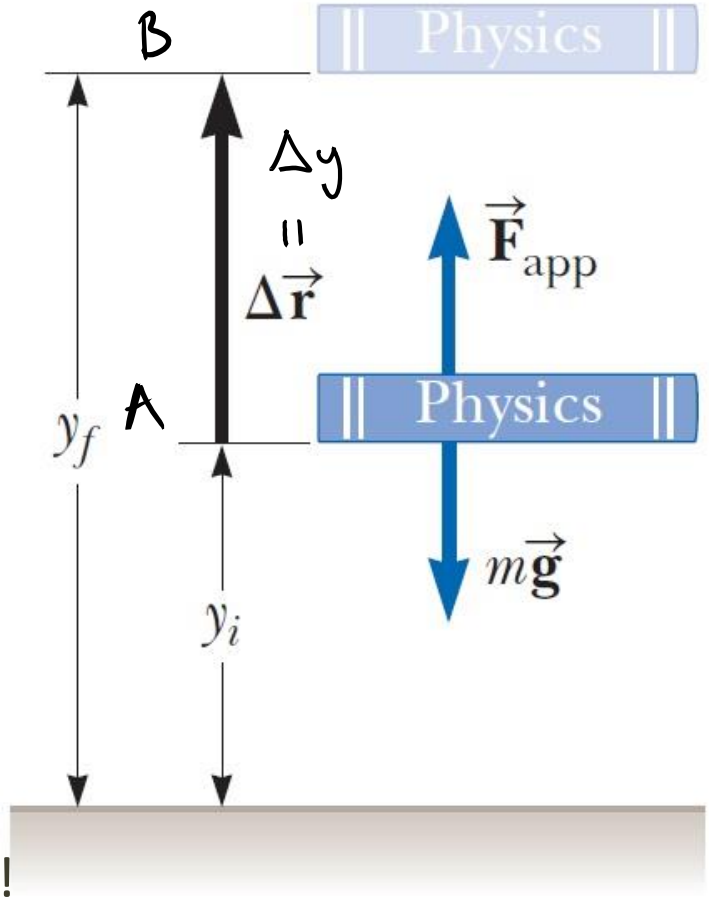
- Εφαρμόζουμε δύναμη για να ανυψώσουμε το βιβλίο με σταθερή (πολύ αργή) ταχύτητα (έτσι ώστε $\vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $W_{ext} = \vec{\mathrm{F}}_{app} \cdot \Delta\vec{r}$
  $= mg\vec{\boldsymbol{j}} \cdot (y_f - y_i)\vec{\boldsymbol{j}}$
  $= mgy_f - mgy_i$
  $= \Delta U_g$

- **Βαρυτική Δυναμική ενέργεια**

$$U_g = mgy$$

- Άρα το έργο της εξωτ. δύναμης ισούται με τη μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος!



Ενέργεια Συστήματος

- **Θυμηθείτε:**
  - Είδαμε ότι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα *μπορεί* να ισοδυναμεί με μεταβολή της κινητικής του ενέργειας, που μεταφράζεται σε ***κίνηση*** των μελών του συστήματος

- Στην προηγούμενη περίπτωση, είδαμε ότι το έργο που παράγεται εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια στο σύστημα, που αναπαριστά αλλαγή στη

  διάταξη/ διαμόρφωση/σύνθεση

  των μελών του συστήματος.

Ενέργεια Συστήματος

- Σε πρακτικά προβλήματα, πρέπει να επιλέγουμε μια διάταξη των μελών του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική
  - Για παράδειγμα, η επιφάνεια της Γης.
  - Πολλές φορές, το πρόβλημα «οδηγεί» στην κατάλληλη επιλογή της διάταξης

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε μια άλλης μορφής δυναμική ενέργεια που μπορεί να έχει ένα σύστημα
- Σύστημα ελατήριο-σώμα (όχι μόνο σώμα!)
- Είδαμε νωρίτερα ότι

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} (kx)dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

- Το έργο που παράγεται στο σύστημα εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση
  - Είναι κι αυτό μια **διάταξη** των μελών του συστήματος!

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} (kx)dx = \underbrace{\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2}_{U_s}$$
$$= U_s^f - U_s^i$$
$$= \Delta U_s$$

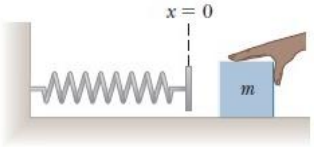
όπου

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

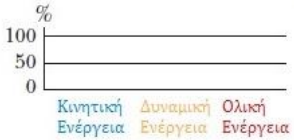
η ***ελαστική δυναμική ενέργεια*** που σχετίζεται με το σύστημα σώματος-ελατηρίου

- Το έργο της εξωτερικής δύναμης ισούται με τη μεταβολή στην ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος

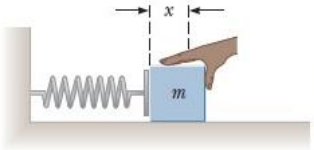
Ενέργεια Συστήματος



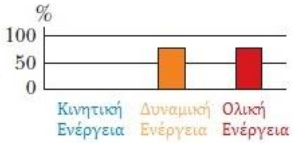
Πριν το ελατήριο συμπιεστεί, δεν υπάρχει ενέργεια στο σύστημα ελατηρίου-σώματος.



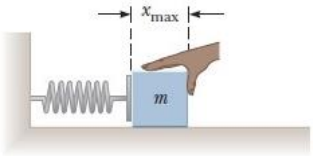
a



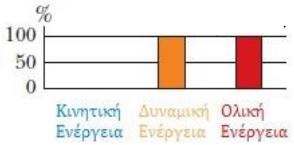
Όταν το ελατήριο συμπιέζεται μερικώς, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ελαστική δυναμική ενέργεια.



b

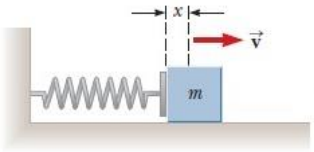


Το ελατήριο συμπιέζεται στο μέγιστο βαθμό, και το σώμα κρατείται σταθερό. Υπάρχει ελαστική δυναμική ενένεργεια στο σύστημα και καθόλου κινητική ενέργεια.



Παράγεται έργο από το χέρι επάνω στο σύστημα ελατηρίου-σώματος, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.

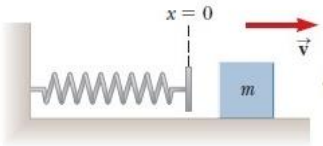
c



Αφού αφήνεται ελεύθερο το σώμα, η ελαστική δυναμική ενέργεια μειώνεται και η κινητική ενέργεια αυξάνεται.

Δεν παράγεται κανένα έργο στο σύστημα ελατηρίου-σώματος από εξωτερική δύναμη, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή

d

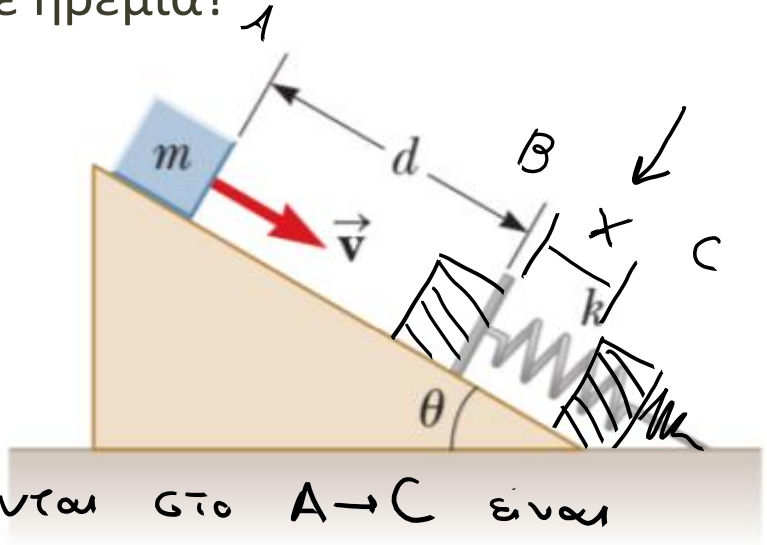


Αφού το σώμα χάσει επαφή με το ελατήριο, η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι κινητική ενέργεια.

e

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**
- Κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0. Πόσο έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?

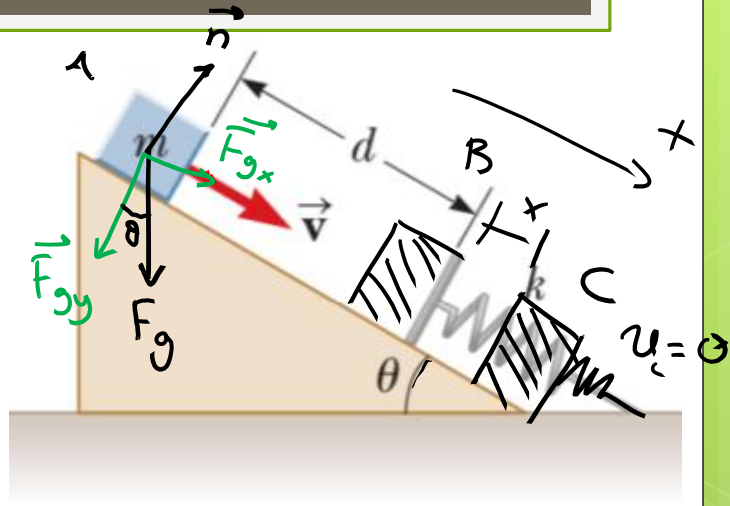


Σύστημα μας το {σώμα m}
(Μονο!)

Όλες οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο A→C είναι εσωτερικές!

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ - Ε : $A \to C$

$$\Delta K^{A\to C} = \sum W_{ext} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_C - K_A = W_{F_{gy}} + W_{F_{gx}} + W_n + W_S = W_{F_{gx}} + W_S$$

($W_{F_{gy}} = 0$, $W_n = 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{F_{gx}} + W_S \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{F_{gx}} + W_S$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}mv_A^2 = mg\sin\theta\,(d+x)\cos 0^\circ + \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

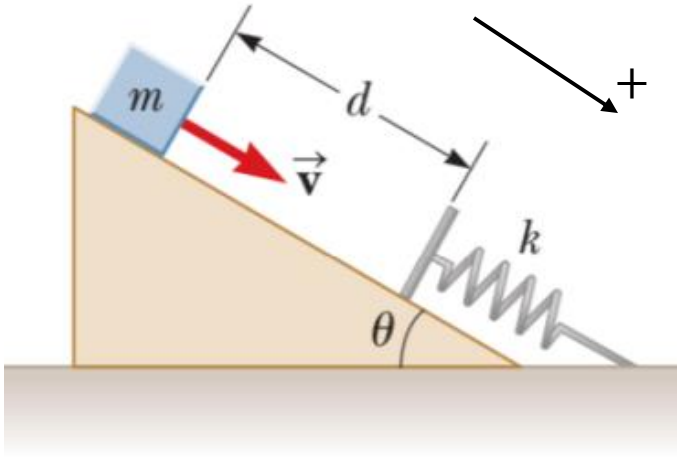
($\cos 0^\circ = 1$, $\frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = 0$)

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}mv_A^2 = mg\sin\theta\,(d+x) + 0 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2m}x^2 - (g\sin\theta)x - \left(\frac{v_A^2}{2} + g\sin\theta\cdot d\right) = 0$$

$\vec{F}_{g_x}\cdot\Delta\vec{x} = mg\sin\theta\,(d+x)$

Ενέργεια Συστήματος



- **Παράδειγμα – Λύση:**

Λύνουμε την εξίσωση:

$$x = \frac{g\sin\theta \pm \sqrt{(g\sin\theta)^2 - 4\frac{k}{2m}\left(-\frac{u_A^2}{2} - g\sin\theta\, d\right)}}{2\frac{k}{2m}}$$

Κρατάμε τη θετική λύση, αφού η μετατόπιση x του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας έχει φορά προς τα δεξιά (κι αυτή έχουμε επιλέξει ως θετική φορά κίνησης)

Συνεχίζεται... ☺